Разбор задач кубка КИТ

Задача A. ИССЛЕДОВАНИЕ

По условию задачи нам дан многочлен четвертой степени:

$$y = P(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + a_4x^4$$

Требуется найти промежутки возрастания и промежутки убывания данной функции на отрезке $[-100; 100]$.

Заметим, что $P(x)$ — непрерывная и дифференцируемая функция на $\mathbb{R}$. По условию сказано, что точки экстремума — целые числа $\Rightarrow \forall x \in \mathbb{Z} \cap [-100; 100)$: $P(x)$ строго монотонна на $(x; x+1)$, т.е. на этом интервале $P'(x) > 0$ или < 0. Таким образом мы можем разбить числовую ось на интервалы длины 1 и сгруппировать их по знаку производной в этих интервалах. От нас требуется вывести все группы в порядке обхода числовой оси слева направо. Чтобы узнать знак производной на $(x; x+1)$, можно узнать значение производной в точке $x + 0,5$, т.е. $P'(x + 0,5)$. Чтобы это сделать нужно сначала найти $P'(x)$

$$P'(x) = a_1 + 2a_2x + 3a_3x^2 + 4a_4x^3$$

и подставить значение $x + 0,5$ в нее (производную).

$$P'(x + 0,5) = a_1 + 2a_2(x + 0,5) + 3a_3(x + 0,5)^2 + 4a_4(x + 0,5)^3$$

Замечание 1. Чтобы избавиться от потери точности, можно домножить $P'(x + 0,5)$ на 8, т.к. это не повлияет на знак. Т.о. получим:

$$8P'(x + 0,5) = 8a_1 + 8a_2(2x + 1) + 6a_3(2x + 1)^2 + 4a_4(2x + 1)^3$$

Задача B. БИРЖА-2017

Даны $N \geqslant 2$ натуральных чисел $x \in [1; 10^5]$. Нужно "склеить"(т.е. приписать одно число справа к другому) два числа и получить новое число с как можно большим значением.

Решение за $O(N^2)$

Переберем все пары чисел, склеим и найдем среди полученных значений максимум.

Решение за $O(n)$

Нужно понять, что значит слкеить два числа. Пусть мы хотим приписать число y справа к числу x и получить новое число v. Обозначим за количество цифр в числе $C(x)$. Тогда $v = x \cdot 10^{C(y)} + y$. Пусть мы зафискировали число y, тогда понятно, что для максимизирования числа v нужно найти максимальное число x из оставшихся чисел. Пусть M_1, M_2 — первый и второй максимум из данных чисел соответственно. Таким образом, можно сделать вывод, что ответ — $max\{M_1 \cdot 10^{C(M_2)} + M_2, M_2 \cdot 10^{C(M_1)} + M_1\}$

Задача C. КВАТЕР-БОЛ

В этой задаче нужно было уметь делать две вещи:

1. Находить площадь многоугольника
2. Проверять, правда ли, что точка находится строго внутри данного многоугольника

В данной задаче мы имеем дело не просто с многоугольником, а с **выпуклым четырехугольником**, тогда, чтобы найти его площадь, можно разбить его на два треугольника, посчитать площадь каждого треугольника отдельно и сложить их.

Обозначим точки четырехугольника за A_0, A_1, A_2, A_3. Для того, чтобы проверить пр-надлежность точки (обозначим за P) многоугольнику, можно сделать следующее: посчитаем значения псевдоскалярных произведений (обозначим за x_i) векторов $\overline{A_i A_{(i+1)\,mod\,4}}$ и $\overline{A_i P}$ для $\forall i \in [0; 3]$. Для того, чтобы точка P была строго внутри, нужно, чтобы все x_i были отличны от нуля и совпадали по знаку. (Фактически мы проверили, что точка не лежит на стороне четырехугольника и находится строго внутри него).